CONCOURS TA

A EPREUVES

COMMUNES

SESSION 1993

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ESEM - ITECH -ENSAM
CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 3 h 00

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats sont invités à accompagner leurs affirmations de justifications complètes mais concises.

Dans ce problème, on se propose , à partir d'un exemple numérique, de construire une méthode algorithmique pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée d'ordre 3.

On désigne par N l'ensemble des entiers naturels et par R le corps des réels.
On se place dans l'espace vectoriel R^3 rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3).

On pourra éventuellement identifier un vecteur x , élément de R^3 , avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ de ses composantes dans cette base canonique . On note 0 le vecteur nul de R^3 .

On désigne par $\|x\|$ la norme euclidienne du vecteur x et on rapelle que , sur une base orthonormale, $\|x\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ où (α,β,γ) sont les composantes de x sur cette base.

Dans l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on note I la matrice unité.

Dans le problème, on étudie la convergence d'une suite $(x_n)_{n\in N}$ de vecteurs de R^3 en faisant intervenir deux bases dont l'une est la base canonique.
A ce sujet, on rappelle que la suite $(x_n)_{n\in N}$ converge si et seulement si chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in N}$, $(\beta_n)_{n\in N}$ et $(\gamma_n)_{n\in N}$ des composantes de x_n dans la base canonique sont convergentes; la limite l de la suite étant alors définie par $l = (\lim \alpha_n)e_1 + (\lim \beta_n)e_2 + (\lim \gamma_n)e_3$.
Un résultat de convergence d'une suite $(x_n)_{n\in N}$ vers une limite l, étant ainsi obtenu dans une base donnée, peut ensuite être exploité en faisant intervenir les composantes dans une autre base.

On pose $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice, dans la base canonique , est A .

I 1- Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.

2- On désigne par λ_1 , λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).
Déterminer λ_1 , λ_2 et λ_3 .

3- Soit ε_i un vecteur propre, de norme 1, associé à λ_i $(i \in \{1,2,3\})$.
Déterminer des vecteurs ε_i puis la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

4- Vérifier que P est orthogonale, en déduire P^{-1}.

5- Calculer $D = P^{-1} A P$ et vérifier que le résultat attendu est obtenu .

6- Soit μ un réel, on pose $B(\mu) = A - \mu I$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $B(\mu)$.

II A 1- Montrer que $\forall x \in R^3 \quad x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.

2- Soit x_0 un vecteur non nul de R^3.

On pose: $\forall n \in N$ $\begin{cases} \tau_n = \| f(x_n) \| \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\tau_n} f(x_n) \end{cases}$

Montrer que ces formules définissent une suite $(x_n)_{n \in N}$ de vecteurs de R^3 .

B Dans toute cette partie, les calculs seront effectués avec la précision de la machine et seront présentés sur la copie avec 6 décimales.

1- Soit $x_0 = e_1$, calculer $x_i, \tau_i \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2- Soit $x_0 = e_2$, calculer $x_i, \tau_i \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

3- Soit $x_0 = -e_1 + e_2$. Comparer x_0 et ε_2 .Que peut-on dire de la suite $(x_n)_{n \in N}$ dans ce cas?

C Cette partie peut être traitée indépendamment de **II-B** et reprend les notations de **II-A**

Dans les questions qui suivent, on pourra , à la suite $(x_n)_{n \in N}$, associer la suite $(y_n)_{n \in N}$ définie par $y_0 = x_0$ *et* $\forall n \in N, y_{n+1} = f(y_n)$

Un vecteur non nul x_0 de R^3 étant donné, on désigne par (a,b,c) ses composantes dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1- Montrer que pour tout entier n , $x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ et $\tau_n = \dfrac{\|y_{n+1}\|}{\|y_n\|}$ $(n > 0)$.

2- Exprimer les nombres τ_n et les vecteurs x_n en fonction des nombres a,b,c, n et , éventuellement, des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

3- En discutant suivant les valeurs des nombres a,b,c, déterminer la limite de la suite $(\tau_n)_{n\in N}$ et étudier les convergences des suites $(x_n)_{n\in N}$, $(x_{2n})_{n\in N}$ et $(x_{2n+1})_{n\in N}$.

D 1- Soit x_0 un vecteur donné arbitraire. On utilise les résultats théoriques de la partie C précédente. Montrer que la considération des suites des composantes $(\alpha_n)_{n\in N}$, $(\beta_n)_{n\in N}$ et $(\gamma_n)_{n\in N}$ sur la base canonique permet d'obtenir l'un des couples constitué par une valeur propre et un vecteur propre associé.

2- Définir un algorithme en français qui permet, à partir de x_0 et de A, de déterminer un vecteur propre et une valeur propre de A.

III On considère l'endomorphisme de R^3 défini par $g = f - 2I$, sa matrice B dans la base canonique est donc $B = A - 2I$

1- Déterminer la condition que doit vérifier x pour que $g(x) \neq 0$

2- Soit $y_0 = e_1$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{\|g(y_n)\|} g(y_n)$

Calculer y_i $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

3- En reprenant pour l'endomorphisme g l'étude faite dans les parties **II C** et **D**, dire si la suite précédente admet une limite.
Peut-on utiliser cette suite pour approcher un vecteur propre de B ?